铜仁一中高二年级防疫期间“停课不停学”网上第六次周考

数学（理科）试卷　参考答案

一、单选题

1．A　命题“$\forall x\in Z$,使$x^2+2x-1<0$”的否定为“$\exists x\in Z$，$x^2+2x-1\geqslant 0$”.

2．C　因为$\dfrac{5}{i-2}=-2-i$，所以复数$\dfrac{5}{i-2}$的共轭复数是$-2+i$，选 C.

3．C　$\because$ $A(2,1,3)$，$B(-4,3,0)$

$d=\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2+(z_1-z_2)^2}=\sqrt{(2+4)^2+(1-3)^2+(3-0)^2}=7$

4．D　$\because f(x)=\ln x+\dfrac{a}{x}$，$\therefore f'(x)=\dfrac{1}{x}-\dfrac{a}{x^2}$，

由题意可$f'(1)=1-a=\tan\dfrac{3\pi}{4}=-1$，因此，$a=2$，故选 D.

5．C 由$iz=2+4i$　可得$z=\dfrac{2+4i}{i}=\dfrac{i(2+4i)}{i^2}=4-2i$

∴z 对应的点的坐标为（4，－2），

6．A　双曲线的中心在原点，焦点在x轴上，其一条渐近线方程为$x-2y=0,\therefore\dfrac{b}{a}=\dfrac{1}{2}$，

离心率$e=\dfrac{c}{a}=\sqrt{1+(\dfrac{b}{a})^2}=\dfrac{\sqrt{5}}{2}$.

7．C　因为$3=1\times 3,8=2\times 4,15=3\times 5,24=4\times 6$, 所以$n=7\times 9=63$，

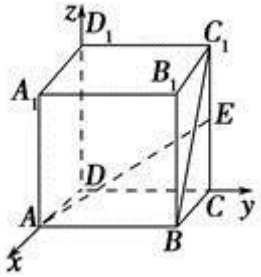
8．C　由复数的运算法则可得：$z=\dfrac{2(-1-i)}{(-1+i)(-1-i)}=\dfrac{2(-1-i)}{2}=-1-i$，则$|z|=\sqrt{2}$，选项 *A* 错误；$z$ 的实部为-1，选项 *B* 错误；z 的虚部为-1，选项 *C* 正确；z 的共轭复数为$\overline{z}=-1+i$，选项 *D* 错误.

9．A　$f'(x)=a-\sin x$，当$a>1$时，　$f'(x)>0$恒成立，即$f(x)$递增，但当$a=1$时，

$f'(x)\geq 0$恒成立，　$f(x)$也递增，因此题中应是“充分不必要条件”.

10．D　解：第一步，第一封信可以投到 4 个邮箱中的任意一个，有 4 种投法　第二步，第二封信可以投到 4 个邮箱中的任意一个，有 4 种投法　第三步，第三封信可以投到 4 个邮箱中的任意一个，有 4 种投法.　根据分步乘法计数原理，得不同的投法的种数为$4\times 4\times 4=64$.

11．B　建立坐标系如图所示．则 $A(1,0,0)$，$E(0,2,1)$，$B(1,2,0)$，$C_1(0,2,2)$，



$\overrightarrow{BC_1}=(-1,0,2)$，$\overrightarrow{AE}=(-1,2,1)$．$\cos\langle\overrightarrow{BC_1},\overrightarrow{AE}\rangle=\dfrac{\overrightarrow{AE}\cdot\overrightarrow{BC_1}}{|\overrightarrow{AE}|\cdot|\overrightarrow{BC_1}|}=\dfrac{\sqrt{30}}{10}$.

12．C　构造函数 $g(x)=\dfrac{f(x)}{e^x}$，则 $g'(x)=\dfrac{e^x f'(x)-e^x f(x)}{e^{2x}}=\dfrac{f'(x)-f(x)}{e^x}>0$，则函数 $g(x)=\dfrac{f(x)}{e^x}$ 是 **R** 的单调递增函数，对不等式 $e^{x-1}f(x)<f(2x-1)$ 的两端同时除以 e^{2x-1} 得 $\dfrac{f(x)}{e^x}<\dfrac{f(2x-1)}{e^{2x-1}}$，则 $x<2x-1$，解得 $x>1$.

二、填空题

13．6　由于双曲线 $\dfrac{x^2}{6}-\dfrac{y^2}{3}=1$ 的 $a^2=6,b^2=3,c^2=a^2+b^2=9\therefore c=3$ 右焦点坐标为 $(3,0)$，因此可知抛物线 $y^2=2px$ 的焦点 $(\dfrac{p}{2},0)=(\sqrt{3},0)\therefore\dfrac{p}{2}=3\therefore p=6$，故答案为 6

14．1　$\because f'(x)=-f'\left(\dfrac{\pi}{4}\right)\cdot\sin x+\cos x$，$\therefore f'\left(\dfrac{\pi}{4}\right)=-f'\left(\dfrac{\pi}{4}\right)\cdot\sin\dfrac{\pi}{4}+\cos\dfrac{\pi}{4}$，解得 $f'\left(\dfrac{\pi}{4}\right)=\sqrt{2}-1$，故 $f\left(\dfrac{\pi}{4}\right)=f'\left(\dfrac{\pi}{4}\right)\cos\dfrac{\pi}{4}+\sin\dfrac{\pi}{4}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}\left(\sqrt{2}-1\right)+\dfrac{\sqrt{2}}{2}=1$，

15．18　$\int_{-3}^{3}\left(x^2-2\sin x\right)dx=\left(\dfrac{1}{3}x^3+2\cos x\right)\Big|_{-3}^{3}=\left(\dfrac{1}{3}\times27+2\cos3\right)-\left[\dfrac{1}{3}\times(-27)+2\cos(-3)\right]=18$

16．　$\left(3e^{\frac{2}{3}}\cdot\dfrac{e^4}{2}\right]\cup\{2e\}$　【解析】 $f(x)$ 的定义域为 $(0,1)\cup(1,+\infty)$，$f'(x)=\dfrac{x(2\ln x-1)}{\ln^2 x}$，令 $f'(x)=0$，则 $x=\sqrt{e}$，在 $(0,1)\cup(1,\sqrt{e})$ 上，$f'(x)<0$；在 $(\sqrt{e},+\infty)$ 上，$f'(x)>0$．所以 $f(x)$ 的单调递减区间为 $(0,1)$，$(1,\sqrt{e})$，单调递增区间为 $(\sqrt{e},+\infty)$．由 $g(x)=0$，得 $f(x)=a$．因为 $f\left(e^{\frac{1}{3}}\right)=3e^{\frac{2}{3}}$，$f(e^2)=\dfrac{e^4}{2}$，且 $\dfrac{e^4}{2}>3e^{\frac{2}{3}}$，又 $f(\sqrt{e})=2e$，所以 a 的取值范围为 $\left(3e^{\frac{2}{3}}\cdot\dfrac{e^4}{2}\right]\cup\{2e\}$.

三、解答题

17.（1）34；（2）1404；（3）381.

【解析】（1）根据题意，选其中一人为负责人，有 3 种情况，若选出的是高一学生，有 13 种情况，若选出的是高二学生，有 12 种情况，若选出的是高三学生，有 9 种情况，由分类计数原理可得，共有 12+13+9＝34 种选法.

（2）根据题意，从高一学生中选出 1 人，有 13 种情况；从高二学生中选出 1 人，有 12 种情况；从高三学生中选出 1 人，有 9 种情况；由分步计数原理，可得共有 12×13×9＝1404 种选法.

（3）根据题意，分三种情况讨论：若选出的是高一、高二学生，有 12×13＝156 种情况，

若选出的是高一、高三学生，有 13×9＝117 种情况，若选出的是高二、高三学生，有 12×9＝108 种情况，由分类计数原理可得，共有 156+117+108＝381 种选法.

18.（1） $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{4}=1\left(y\neq 0\right)$**；（2）** $x+4y-5=0$

【解析】（1）$\because$ $\triangle ABC$ 的周长为 $4\sqrt{3}+8$，点 $A\left(-2\sqrt{3},0\right),B\left(2\sqrt{3},0\right)$,

$\therefore \left|AB\right|=4\sqrt{3},\left|BC\right|+\left|AC\right|=8.\because 8>4\sqrt{3},\therefore$ 点 C 到两个定点的距离之和等于定值,

$\therefore$ 点 C 的轨迹是椭圆,设它的方程为 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\left(a>b>0\right)$.

$\therefore a=4,c=2\sqrt{3},b^2=4,\therefore$ 椭圆的方程是 $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{4}=1\left(y\neq 0\right)$.

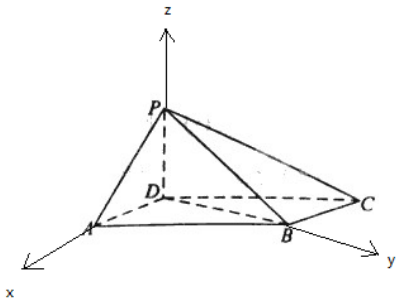
（2）设 $M\left(x_1,y_1\right),N\left(x_2,y_2\right)$，两点在椭圆上,所以 $\begin{cases}\frac{x_1^2}{16}+\frac{y_1^2}{4}=1\\ \frac{x_2^2}{16}+\frac{y_2^2}{4}=1\end{cases}$,

两式相减可得 $\frac{\left(x_1+x_2\right)\left(x_1-x_2\right)}{16}+\frac{\left(y_1+y_2\right)\left(y_1-y_2\right)}{4}=0$,

$\because x_1+x_2=2,y_1+y_2=2$，代入可得 $\frac{y_1-y_2}{x_1-x_2}=-\frac{1}{4}$,

$\therefore$ 直线 l 的方程是 $y-1=-\frac{1}{4}\left(x-1\right)$，即 $x+4y-5=0$.

19.（1）见解析（2）60°.



【解析】证明：(I)因为$\angle DAB=60°$，$AB=2AD$，

由余弦定理得$BD=\sqrt{3}AD$，从而$BD^2+AD^2=AB^2$，故 BD⊥ AD，

又PD ⊥底面 ABCD，可得$BD\perp PD$，所以BD ⊥平面PAD.故$PA\perp BD$

(II)如图，以 D 为坐标原点，AD 的长为单位长，

射线 DA 为 x 轴的正半轴，建立空间直角坐标系$D-xyz$，

则$B(0,\sqrt{3},0)$，$C(-1,\sqrt{3},0)$，$P(0,0,1)$，

$\overrightarrow{AB}=(-1,\sqrt{3},0)$，$\overrightarrow{PB}=(0,\sqrt{3},-1)$，$\overrightarrow{BC}=(-1,0,0)$，

平面 PAD 的一个法向量为$\vec{n}=(0,1,0)$，设平面 PBC 的法向量为$\vec{m}=(x,y,z)$，

则$\begin{cases}\vec{m}\cdot\overrightarrow{PB}=\sqrt{3}y-z=0\\ \vec{m}\cdot\overrightarrow{BC}=-x=0\end{cases}$，取$y=1$，得$\vec{m}=(0,1,\sqrt{3})$，

$|\cos<\vec{n},\vec{m}>|=\frac{|\vec{n}\cdot\vec{m}|}{|\vec{n}|\cdot|\vec{m}|}=\frac{1}{2}$，故平面 PAD 与平面 PBC 所成的锐二面角的大小为60°.

20.（I）：$\frac{x^2}{4}+y^2=1$；（II）$m=\pm\frac{\sqrt{10}}{2}$

【解析】（I）由题意知：$a=2$，$\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{3}}{2}$，则$c=\sqrt{3}$　　$\therefore b^2=a^2-c^2=1$

$\therefore$椭圆M 的方程为：$\frac{x^2}{4}+y^2=1$

（II）设$A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$ 联立$\begin{cases}y=x+m\\ \frac{x^2}{4}+y^2=1\end{cases}$得：$5x^2+8mx+4m^2-4=0$

$\therefore\Delta=64m^2-20(4m^2-4)>0$，解得：$-\sqrt{5}<m<\sqrt{5}$

$\therefore x_1+x_2=-\frac{8m}{5}$，$x_1x_2=\frac{4m^2-4}{5}$　　$\therefore|AB|=\sqrt{2}\cdot\sqrt{(x_1+x_2)^2-4x_1x_2}=\frac{4\sqrt{2}}{5}\cdot\sqrt{5-m^2}$　又点C

到直线AB 的距离为：$d=\frac{|m|}{\sqrt{2}}$

$\therefore S_{\Delta ABC}=\frac{1}{2}|AB|\cdot d=\frac{1}{2}\times\frac{4\sqrt{2}}{5}\cdot\sqrt{5-m^2}\cdot\frac{|m|}{\sqrt{2}}=1$，解得：$m=\pm\frac{\sqrt{10}}{2}\in(-\sqrt{5},\sqrt{5})$

$\therefore m=\pm\frac{\sqrt{10}}{2}$

21.（1）3；（2）见解析；（3）$a>1$

【解析】（*1*）$f'(x)=1+\frac{a}{x^2}-\frac{a+1}{x}$，

由题意可得：$f'(3)=1+\frac{a}{9}-\frac{a+1}{3}=0$，解得 $a=3$.

（*2*）$f'(x)=1+\frac{a}{x^2}-\frac{a+1}{x}=\frac{(x-1)(x-a)}{x^2}$，（$x>0$）.

①当 $a>1$ 时，可得：函数 $f(x)$ 在（0，1）上单调递增；在（1，a）上单调递减；在（a，+∞）上单调递增.

②当 $a=1$ 时，可得：函数 $f(x)$ 在（0，+∞）上单调递增.

③当 $0<a<1$ 时，可得：函数 $f(x)$ 在（0，a）上单调递增；在（a，1）上单调递减；在（1，+∞）上单调递增.

④当 $a\le 0$ 时，可得：函数 $f(x)$ 在（0，1）上单调递减；在（1，+∞）上单调递增.

（3）∵$f(x)$ 在 $x=1$ 处取得极大值，∴$f'(1)=1+a-(a+1)=0$.

由（*2*）可得：只有 $a>1$ 时满足条件，∴a 的取值范围是（1，+∞）.

22.（1）$\rho^2+8\rho^2\sin^2\theta-9=0$ ；（2）$5\sqrt{3}$.

【解析】（1）曲线 C_1 的参数方程为 $\begin{cases}x=3cost,\\ y=sint,\end{cases}$（$t$ 为参数）.

转换为直角坐标方程为：$\frac{x^2}{9}+y^2=1$，转换为极坐标方程为：$\rho^2+8\rho^2\sin^2\theta-9=0$.

（2）因为 A，B 两点在直线 l 上，可设 $A\left(\rho_1,\frac{\pi}{6}\right)$，$B\left(\rho_2,\frac{\pi}{6}\right)$.

把点 A 的极坐标代入 C_1 的方程得：$\rho_1^{\,2}+8\rho_1^{\,2}\sin^2\frac{\pi}{6}-9=0$，解得 $\rho_1=\pm\sqrt{3}$.

由已知 A 点在第一象限，所以 $\rho_1=\sqrt{3}$.

因为 B 异于原点，所以把点 B 的极坐标代入 C_2 的方程得：

$\rho_2+8\cos\frac{\pi}{6}=0$，解得 $\rho_2=-4\sqrt{3}$.

所以，$|AB|=|\rho_1-\rho_2|=|\sqrt{3}+4\sqrt{3}|=5\sqrt{3}$.